MATH-F113 : Mathématiques

Prof. Jennifer Alonso García

Université Libre de Bruxelles

BA1 en Sciences Pharmaceutiques

Module SI

Cours théorique :

- Jennifer Alonso García, `jennifer.alonso.garcia@ulb.ac.be`
- 1 séance S1 et S2, 2 séances S3 à S6, et S8 = 12 cours, voir GeHoL.

Exercices :

- Assistants : Anna Vanden Wyngaerd, Julie Distexhe, Paulien Jansen.

Les groupes d'exercices

Vous êtes réparti en deux groupes : A et B.

- **Groupe A de 14h à 16h en salle P.FORUM.E - Groupe A2**
- **Groupe B de 14h à 16h en salle P.FORUM.C - Groupe A1, B1, B2**

Les groupes vont peut-être changer d'horaire et/ou de salle au cours du semestre : voir GeHoL.

Respecter vos groupes, la capacité des salles est faîtes en fonction.

Supports

Les slides font office de syllabus. Ces slides, ainsi que les feuilles d'exercices, seront disponibles sur l'Université Virtuelle (UV).

`https://uv.ulb.ac.be/login2/index.php`

Matière d'examen : ce qui aura été vu au cours et aux séances d'exercices.

But du cours

Le but de ce cours est de fournir les bases mathématiques qui vous seront nécessaires dans la suite de vos études de sciences.

Sujets abordés : logique, nombres, combinatoire, équations à coeeficients réels, géométrie, fonction d'une variable réelle (continuité, dérivabilité, intégration), fonction de plusieurs varaibles, équations différentielles, probabilités et statistiques.

Chapitre I : Éléments de Logique

Introduction

Avant d'entreprendre l'étude des mathématiques proprement dites, il est indispensable de maîtriser certaines bases élémentaires de logique.

Ces bases sont en fait nécessaires pour comprendre toutes les sciences (et en particulier les sciences pharmaceutiques).

Introduction

Voici un exemple concret.

Exemple 1

Lorsque je donne un médicament A à un certain patient, des boutons rouges apparaissent sur son visage. Je constate qu'un second patient a le visage couvert de boutons rouges. Puis-je en conclure qu'il a pris le médicament A ?

- La réponse est NON : il existe d'autres manières d'avoir le visage couvert de boutons rouges (par exemple : un autre médicament)
- Dire qu'une proposition p_1 (ici : le patient prend le médicament A) implique une proposition p_2 (ici : le patient attrape des boutons) n'est pas la même chose que de dire que p_2 implique p_1.

Introduction

Dans le cadre des mathématiques, inverser une implication logique est une erreur de raisonnement.

Exemple 2

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable (elle admet une fonction dérivée f') alors elle est aussi continue (on peut dessiner son graphique sans lever le crayon).
Il ne faut pas en déduire que si f est continue elle est aussi dérivable. C'est tout à fait faux !

(Les fonctions continues/dérivables seront revues dans la suite du cours aux chapitres VI, VII et VIII).

Un autre exemple.

Exemple 3

Pour concevoir un certain médicament A (sous forme d'une solution liquide) je peux utiliser plusieurs produits. Je sais la chose suivante :

Si j'utilise au moins $5\,\mathrm{mL}$ *du produit* p_1 _et_ *au moins* $5\,\mathrm{mL}$ *du produit* p_2 _et_ *que je n'utilise pas le produit* p_3*, alors ma solution sera de couleur rouge.*

Un de mes collègues a conçu le médicament A, et celui-ci est de couleur bleue. Que puis-je logiquement en déduire sur les produits que mon collègue a utiliser ?

Exemple (Suite de l'exemple précédent)

Réponse : vu que la solution est bleue, il nous faut nier la condition qui nous assure que le médicament sera de couleur rouge. On peut donc en déduire que :

Mon collègue a utilisé moins de $5\ \mathrm{mL}$ *de* p_1 *ou il a utilisé moins de* $5\ \mathrm{mL}$ *du produit* p_2 *ou il a utilisé* p_3*.*

Remarquons que au moins une de ces trois conditions est satisfaite, mais pas nécessairement toutes !

Alternativement, c'est suffisant qu'une des conditions initielles ne soit pas satisfaite pour justifier que la solution soit bleue.

Introduction

Dans la suite du chapitre, on va reprendre ceci de façon plus systématique.

Le but est de mettre en évidence les façons correctes de raisonner : ne pas confondre le sens d'une implication, savoir nier correctement un énoncé, etc.

Propositions logiques

Une **proposition logique** est un énoncé, une affirmation à laquelle on peut associer une valeur de vérité : **vrai** ou **faux**.

Dans la suite on les désignera par des lettres minuscules : $p, q, \ldots$

Propositions logiques

Voici quelques exemples de propositions logiques :

- p : "le médicament est de couleur rouge"
- q : "le ciel est gris aujourd'hui"
- r : "$5 + 5 = 10$"
- s : "toute fonction continue est dérivable"

Mais pas t : "la voiture du voisin".

Contrairement à p, q, r et s, il n'est pas possible d'assigner une valeur de vérité vrai ou faux à t.

Toutefois, t : "la voiture du voisin est rouge" est une proposition logique.

Connecteurs logiques

Il est possible de relier les propositions logiques entre elles au moyen de **connecteurs** pour en obtenir d'autres.

Les principaux connecteurs logiques sont

- l'**implication** $\implies$
- la **négation** $\neg$
- la **conjonction** $\wedge$ (le "et")
- la **disjonction** $\vee$ (le "ou")

Connecteurs logiques

On a déjà rencontré les connecteurs logiques dans les exemples concrets du début du chapitre. Notre but est d'apprendre à bien les manipuler de façon à ne pas nous tromper lorsque nous formulons/analysons des raisonnements, qu'ils soient mathématiques, scientifiques ou issus de la vie de tous les jours.

Donnons quelques exemples supplémentaires de propositions logiques liés par des connecteurs.

L'implication

Exemple 4

La proposition logique

r : "Si il pleut je prends mon parapluie"

est obtenue en reliant les propositions

q : "je prends mon parapluie" et p : "il pleut".

Il s'agit de p implique q (et non pas de q implique p !).

On note la proposition logique p implique q sous la forme $p \Rightarrow q$.

La négation

Exemple 5

La proposition q : "ma chemise n'est pas bleue" est la négation de p : "ma chemise est bleue".

La négation d'un proposition p est appelé "non p" et on la note $\neg p$.

La conjonction

Exemple 6

La proposition

r : "ma chemise est bleue et mon pantalon est rouge"

est la conjonction des propositions

p : "ma chemise est bleue" et q : "mon pantalon est rouge".

On note la conjonction (p et q) sous la forme $p \wedge q$.

La disjonction

Exemple 7

La proposition

r : "l'entier n est pair ou impair"

est la disjonction des propositions

p : "l'entier n est pair" et q : "l'entier n est impair".

On note la disjonction (p ou q) sous la forme $p \vee q$.

Connecteurs logiques

En résumé, à partir de deux propositions logiques p et q il est possible de former les propositions :

- $p \Rightarrow q$ (c'est-à-dire : p **implique** q)
- $\neg p$ (c'est-à-dire : **non** p)
- $p \wedge q$ (c'est-à-dire : p **et** q)
- $p \vee q$ (c'est-à-dire : p **ou** q)

Comme nous allons le voir, les valeurs de vérité de ces propositions peuvent se déduire de celles de p et q.

Connecteurs logiques

Remarque : on peut aussi s'intéresser à des formules logiques plus longues, obtenues en itérant à plusieurs reprises les constructions qu'on vient de décrire. Voici quelques exemples de propositions logiques construites à partir des propositions logiques p, q et r :

- $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$,
- $(p \vee q) \Rightarrow r$,
- $(p \wedge q \wedge r) \vee q$
- etc. !

Connecteurs logiques : la négation

Quelle est la valeur de vérité de la proposition $\neg p$?

C'est évident : $\neg p$ sera vraie lorsque p est fausse et fausse lorsque p est vraie.

Exemple 8

On sait que la voiture de mon voisin est bleue. Alors la proposition p : "La voiture est rouge" est fausse. Par conséquent, $\neg p$: "La voiture n'est pas rouge" est vraie.

Connecteurs logiques : la négation

On note ceci sous la forme d'une **table de vérité** qui donne la valeur de vérité de $\neg p$ sachant celle de p :

p	$\neg p$
0	1
1	0

On représente par convention la valeur vrai par 1 et faux par 0.

Connecteurs logiques : la conjonction

Quelle est la valeur de vérité de la proposition $p \wedge q$?

Comme il s'agit d'un "et", les propositions p et q doivent toutes les deux êtres vraies pour que $p \wedge q$ soit vraie.

Exemple 9

La voiture de mon voisin est bleue ***et*** *elle est nouvelle. Nous avons p : "La voiture est bleue" et q : "La voiture est nouvelle". Alors $p \wedge q$ est vraie. Si nous changeons la phrase à une voiture rouge et nouvelle $p \wedge q$ est fausse car les deux propositions ne sont pas satisfaites.*

Connecteurs logiques : la conjonction

La table de vérité de la conjonction est donc :

p	q	p $\wedge$ q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Connecteurs logiques : la disjonction

Quelle est la valeur de vérité de la proposition $p \vee q$?

Comme il s'agit d'un "ou", une (au moins) des deux propositions p et q doit être vraie pour que $p \vee q$ soit vraie.

Exemple 10

*On reprend l'exemple précédent. Nous avons p : "La voiture est bleue" et q : "La voiture est nouvelle". Alors $p \vee q$: "La voiture est bleue **ou** nouvelle". Si nous changeons la phrase a "une voiture rouge et nouvelle" la proposition $p \vee q$ est encore vraie car q est vraie.*

Connecteurs logiques : la disjonction

La table de vérité de la disjonction est donc :

p	q	p $\vee$ q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Connecteurs logiques : la disjonction

Remarque : le connecteur logique $\vee$ qu'on vient d'étudier correspond à un <u>ou inclusif</u> : $p \vee q$ est vraie si p est vraie ou q est vraie ou bien les deux à la fois.

Dans le langage courant, ou utilise souvent le mot "ou" dans un sens <u>exclusif</u>. Par exemple : "ce dimanche, j'irai à la mer ou à la campagne." Ou sous-entend clairement qu'on ira soit à la mer soit à la campagne mais pas aux deux à la fois.

Cette différence entre ou inclusif et exclusif n'est pas un problème car on peut construire le ”ou exclusif” à partir des autres connecteurs logiques.

Le ou inclusif

Deux logiciens se rencontrent.

- Salut vieux ! J'ai de bonnes nouvelles ! Ma femme a récemment mis au monde notre premier enfant !
- Félicitations ! C'est un garçon ou un fille ?
- Oui.

Connecteurs logiques : l'implication $p \Rightarrow q$

Quelle est la valeur de vérité de la proposition $p \Rightarrow q$?

Comme il s'agit d'une implication, si p est vraie alors q doit être vraie aussi pour que $p \Rightarrow q$ soit vraie.

Exemple 4 "S'il pleut je prends mon parapluie" présente un cas d'implication.

Mais si p est fausse, $p \Rightarrow q$ est aussi vraie !

Connecteurs logiques : l'implication $p \Rightarrow q$

On définie les propositions p : "il pleut" et q : "je lis un bouquin". Je sais que "s'il pleut je lis un bouquin" ($p \Rightarrow q$) est vraie.

Imaginons les situations suivantes :
S'il pleut ($p = 1$), je lis un bouquin ($q = 1$), alors "$p \Rightarrow q$"=1,
s'il pleut ($p = 1$), je ne lis pas un bouquin ($q = 0$), alors "$p \Rightarrow q$"=0,

mais
s'il ne pleut pas ($p = 0$), je lis un bouquin ($q = 1$), alors "$p \Rightarrow q$"=1
S'il ne pleut pas ($p = 0$), je ne lis pas un bouquin ($q = 0$), alors "$p \Rightarrow q$"=1

Pourquoi ? Le fait que $p = 0$ ne donne pas assez d'information pour dire dans ces deux cas que "$p \Rightarrow q$"=0. Il se peut, par exemple, que $p \Rightarrow q$ et $\neg p \Rightarrow q$ soient les deux correctes.

Connecteurs logiques : l'implication $p \Rightarrow q$

La table de vérité de l'implication est donc :

p	q	p ⇒ q
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Si p est fausse alors on considère $p \Rightarrow q$ comme vraie quel que soit la valeur de vérité de q ! En d'autres termes, on considère que quelque chose de faux peut impliquer n'importe quoi.
De manière un peu surprenante cela veut dire qu'il faut donner la valeur de vérité vraie aux propositions suivantes :

- Pékin est la capitale de la Russie donc $3 < 1$.
- Pékin est la capitale de la Russie donc $3 > 1$.

Tables de vérité

On a déterminé les tables de vérité des expressions $\neg p$, $p \Rightarrow q$, $p \vee q$, $p \wedge q$.

A partir de cela, on peut déterminer la table de vérité de n'importe quelle expression construite à partir de proposition logiques $p, q, r, \ldots$ et des connecteurs logiques $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$. Il suffit de donner toutes les valeurs possibles aux différentes propositions $p, q, r, \ldots$ et d'appliquer les tables qu'on vient de voir.

Tables de vérité

Voici par exemple la table de vérité de $\neg q \Rightarrow \neg p$.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	1	0	0	1

On rempli la colonne de la négation $\neg q$ à partir de la colonne 1. On rempli la colonne de la négation $\neg p$ à partir de la colonne 2. On rempli la colonne 5 à partir des colonnes 3 et 4 grâce à la table de l'implication.

Tables de vérité

Les tables de vérité c'est très bien, mais ça sert à quoi ?

Ces tables sont très pratiques pour le cours de mathématiques pour ne faire pas des grandes erreures.

Aussi très pratique pour prouver que certains expressions logiques sont équivalentes. Voyons ceci sur un exemple.

Tables de vérités

Exemple 11

Lorsque je donne un médicament A à un certain patient, des boutons rouges apparaissent sur son visage.
Cette affirmation semble dire la même chose que la suivante : si le patient n'a pas de boutons rouges sur le visage, c'est qu'il n'a pas prit le médicament A.

On émet l'hypothèse que l'affirmation $p \Rightarrow q$ est équivalente à l'affirmation $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Propositions équivalentes

On dira que deux propositions logiques p_1, p_2 formées à partir des propositions logiques $p, q, r, \ldots$ et de connecteurs sont **équivalentes** si, quel que soit les valeurs de vérité de $p, q, r, \ldots$ les propositions p_1 et p_2 auront même valeur de vérité.

On note $p_1 \iff p_2$ quand les propositions p_1, p_2 sont équivalentes. On dit aussi p_1 si et seulement si p_2 pour dire quelles sont équivalentes.

Propositions équivalentes

Pour vérifier que deux propositions logiques sont équivalentes : il suffit de faire leurs tables de vérité, et de constater qu'elles sont identiques.

On a déjà déterminé les tables de vérité de $p \Rightarrow q$ et $\neg q \Rightarrow \neg p$:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1

Ces deux propositions sont donc équivalentes.

Propositions équivalentes

On dit parfois que l'implication $\neg q \Rightarrow \neg p$ est la **contraposée** de l'implication $p \Rightarrow q$. Une implication est donc toujours équivalente à sa contraposée.

L'implication $q \Rightarrow p$ est la **réciproque** de l'implication $p \Rightarrow q$. Attention, elles ne sont en général pas équivalentes.

Exemple 12

"S'il pleut je prends mon parapluie", <u>n'implique pas</u> "si je prends mon parapluie, il pleut"

Contraposée, réciproque

Voici un exemple très simple d'énoncé mathématiques où il est important de pouvoir faire la distinction.

Exemple 13

Rappelons qu'un nombre entier $n > 1$ est ***premier*** *lorsqu'il est divisible seulement par 1 et par lui même.*
Par exemple : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sont premiers, mais pas $4 = 2 \cdot 2$ ni $6 = 3 \cdot 2$.
Soit $p > 2$ un nombre entier. On considère l'implication suivante :
Si p est premier alors p est impair.
Sa contraposée est : Si p est pair alors p n'est pas premier.
Sa réciproque est : Si p est impair alors p est premier.
L'implication et sa contraposée sont vraies mais la réciproque est fausse.

Retour sur l'équivalence $p \iff q$

La proposition $p \Leftrightarrow q$ est vraie exactement lorsque p est q ont même valeur de vérité et elle est fausse sinon.

p	q	p ⇔ q
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Donc, dire que p est équivalent à q revient à dire que $p \Rightarrow q$ et sa réciproque $q \Rightarrow p$ sont toutes les deux vraies.

Equivalence (exercice)

1. On peut montrer (exercice) que $p \Leftrightarrow q$ est équivalent à
$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$
.
2. De même on peut montrer que le "ou exclusif" est équivalent à
$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q).$$

Rappel : Comment voir l'équivalence ? Avec la table vérité !

Equivalence en pratique

En guise d'application prouvons le résultat suivant sur les nombres entiers.

Theorem 1

Un entier positif n est un nombre pair si et seulement si n^2 est pair.

Il y a deux choses à montrer :

1. l'implication directe ($\Rightarrow$) : si un nombre est n pair (par exemple : $n = 6 = 3.2$) alors son carré sera pair (ici : $6^2 = 36 = 2.18$)
2. la réciproque ($\Leftarrow$) : si le carré de n est pair alors c'est que n était pair au départ (par exemple : 16 est pair et 16 est le carré de 4, qui est bien pair).

Equivalence en pratique[2]

L'**implication directe** est facile à prouver. Si n est pair c'est que n s'ècrit $n = 2k$ pour k un autre entier. Alors $n^2 = 4k^2 = 2.(2k^2)$ et donc n^2 est bien pair.

Pour la **réciproque**[1], il est plus simple de prouver sa contraposée (qui lui est équivalente). On montre donc que si n est impair alors n^2 est impair.

Si n est impair alors n s'écrit $n = 2k + 1$ pour k un autre entier. Donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ c'est-à-dire $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et donc n^2 est bien impair.

---

1. C'est-à-dire $q \Rightarrow p$. On utilise $\neg p \Rightarrow \neg q$.
2. p : "$n > 2$ est pair" ; q : "n^2 est pair".

Négation de propositions composées

Il arrive souvent qu'on doive nier une proposition logique faisant intervenir les connecteurs logiques $\vee, \wedge, \Rightarrow$.

Comment procéder pour trouver une formule logique plus simple pour $\neg(p \vee q)$, $\neg(p \wedge q)$ et $\neg(p \Rightarrow q)$?

Négation de propositions composées

La proposition $\neg(p \vee q)$ est équivalente à la proposition $\neg p \wedge \neg q$.
De même, $\neg(p \wedge q)$ est équivalent à $\neg p \vee \neg q$

Exemple 14

p : "voiture rouge", q : "voiture nouvelle".
*$p \vee q$: "voiture rouge **ou** nouvelle".*
$\neg(p \vee q)$: "voiture n'est ni rouge ni nouvelle"
="voiture non-rouge"$\wedge$ "voiture non-nouvelle"
="$\neg p \wedge \neg q$"

C'est intuitivement évident : dire que p ou q n'est pas vrai revient à dire p n'est pas vrai et que q n'est pas vrai (et inversément). Il en va de même pour la deuxième équivalence.Pour prouver le résultat on compare les tables de vérité.

Négation de la conjonction

Exemple 15

La négation de l'affirmation

"Les composé A ***et*** *B de ce médicament sont nocifs pour le patient"*

est

"Le composé A de ce médicament n'est pas nocif pour le patient ***ou*** *le composé B de ce médicament n'est pas nocif pour le patient"*

Négation de l'implication

On montre de même que la proposition

$$\neg(p \Rightarrow q)$$

est équivalente à

$$p \wedge \neg q.$$

En d'autre termes : si p n'implique pas q, c'est qu'on peut avoir à la fois p et non q !

Négation

Exemple 16

La négation de l'affirmation

"Si le patient prend le médicament A, il n'attrape pas la grippe"

est

"Le patient prend le médicament A et attrape la grippe"

Négation (Exercice)

Exercice : Quelle est la négation de l'affirmation

“Si le patient prend le médicament A ou le médicament B, il n'attrapera ni la grippe ni la tuberculose” ?

Les quantificateurs

Exemple 17

Comment nier une affirmation telle que :
"Tout médicament de couleur rouge soigne la grippe" ?

Ici on a un ***quantificateur*** *qui apparaît et qu'on doit nier, c'est le* ***tout****.*

La négation est bien :

"Il existe un médicament de couleur rouge qui ne soigne pas la grippe."

Quantificateurs

Les quantificateurs "pour tout" et "il existe" sont fort courants en mathématiques, on les note respectivement $\forall$ (pour tout) et $\exists$ (il existe).

Pour nier une affirmation faisant intervenir "pour tout", on doit le remplacer par "il existe", et inversément.

Les prévues par récurrénce (a.k.a. induction) sont des exemples de preuves mathématiques où les quantificateurs "pour tout" sont très importants.

Négation et quantificateurs

Exemple 18

La négation de

"Tout nombre entier est premier"

est

"Il existe un nombre entier qui n'est pas premier."

La preuve par récurrence

L'idée : une méthode de preuve pour prouver une proposition logique qui dépend d'un paramètre entier. Par exemple : "Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ le n-ième patient a $n-1$ sur n chances de guérir."

La stratégie : En 2 étapes : l'**initialisation**, où l'on prouve le premier rang, et l'**étape de récurrence**, où l'on suppose vraie la propriété à un certain rang n (c'est l'**hypothèse de récurrence**) et on la prouve au rang suivant $n+1$.

Pourquoi ça marche ?

La preuve par récurrence en exemple

Montrons que pour tout entier $n > 0$ on a

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

<u>Initialisation.</u> Pour $n = 1$ on a $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ ✓

<u>Etape de récurrence.</u> Supposons que la proposition est vraie pour un certain rang n (H.R.). Montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1 &= \overbrace{\frac{n(n+1)}{2}}^{(H.R.)} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n(\mathbf{n+1}) + 2(\mathbf{n+1})}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$ ✓.

On conclut que la propriété est vraie **pour tout** $n > 0$.

Résumé des points importants du chapitre

1. Les propositions logiques et les différents connecteurs : $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,
2. Les tables de vérité, l'équivalence logique,
3. La réciproque d'un implication, la contraposée d'une implication. Une implication est logiquement équivalente à sa contraposée, mais pas à sa réciproque.
4. La négation des propositions $p \vee q$, $p \wedge q$ et $p \Rightarrow q$ et des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
5. La preuve par réccurence.