Chapitre III : Résolutions d'équations sur $\mathbb{R}$

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques méthodes de résolutions d'équations et systèmes d'équations.

Résoudre une équation veut dire **en déterminer toutes les solutions** dans un ensemble de nombres donnés. Nous considérerons seulement les solutions **réelles** (dans $\mathbb{R}$) dans ce chapitre.

Introduction

Il faut se garder de croire qu'il est possible de résoudre n'importe quelle équation sur $\mathbb{R}$. Pour la plupart des équations, on ne connaît aucune méthode de résolution exacte !

Exemple 1

Pour l'équation suivante

$$\sin(x^5) + \sqrt{x^6 + 1} = 5 - x^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

on n'a pas de méthode de résolution. Les solutions sont surement difficile à trouver...

Cependant on connaît des méthodes de résolutions exactes pour certains types d'équations.

Equations polynomiales

Une **équation polynomiale** (à coefficients réels) est de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels.

On dit aussi que

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{2}$$

est un **polynôme** en x. Si $a_n \neq 0$, on dit que n est le **degré** du polynôme (ou de l'équation polynomiale).

Une solution de l'équation polynomiale (1) est appelée une **racine** du polynôme (2).

Equations polynomiales

Exemple 2

Les équations polynomiales de degré 1 *sont les équations de la forme*

$$a_1 x + a_0 = 0.$$

Elles sont très simple à résoudre ($x = -a_0/a_1$)*. Les équations polynomiales de degré* 2 *sont celles de la forme*

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

On sait aussi les résoudre facilement (méthode du discriminant $\Delta = a_1^2 - 4a_0 a_2$*) SUPPOSEE ACQUIS.*

Rappelons qu'il peut y avoir deux solutions ($\Delta > 0$), une solution ($\Delta = 0$) ou pas de solution ($\Delta < 0$).

Equations polynomiales

Pour les équations polynomiales de degré 3 et 4, il existe des méthodes de résolutions, mais elles sont assez compliquées, *on ne les enseignera pas ici*.

En revanche on ne peut pas exprimer les solutions d'une équation polynomiale quelconque de degré au moins 5 en terme de ces coefficients en utilisant les opérations $+, -, \cdot, /$ et les racines n-ièmes ($\sqrt[n]{\ }$).

On a cependant des astuces dans certain cas particuliers.

Une astuce lorsque l'on connaît une solution

Supposons que $x = r$ est une racine d'un polynôme $p(x)$ de degré n. Alors on peut écrire $p(x)$ sous la forme

$$p(x) = (x - r)q(x)$$

avec q un polynôme de degré $n - 1$. On dit que l'on a **factorisé** $p(x)$ par $(x - r)$.

Ainsi on ramène la résolution de l'équation $p(x) = 0$ à la résolution d'une équation polynomiale de degré plus petit, en l'occurence $q(x) = 0$.

Exemple 3

Considérons l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 4 = 0.$$

On constate que $x = 1$ *est une solution. On peut alors factoriser le polynôme* $x^3 - 5x^2 + 4$ *par* $(x - 1)$. *On a*

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 + 4 &= (x-1)(\ ?\ x^2 +\ ?\ x +\ ?\ ) \\ &= (x-1)(\ 1\ x^2 +\ ?\ x +\ ?\ ) \\ &= (x-1)(\ 1\ x^2 +\ (-4)\ x +\ ?\ ) \\ &= (x-1)(\ 1\ x^2 +\ (-4)\ x +\ (-4)\ ) \\ &= (x-1)(x^2 - 4x - 4). \end{aligned}$$

L'exemple précédent, mais rigureux

Comment obtenir la factorisation de l'exemple précédent d'une facon plus rigureuse ?

$$\begin{aligned}
1 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 4 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\
&= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\
&= a \cdot x^3 + (b-a) \cdot x^2 + (c-b) \cdot x - c
\end{aligned}$$

a est nécessairement égal à 1.

Alors, $(b-a) = -5$ donne $b = -4$.

L'équation originale n'a pas d'élément x,.

donc $c - b = 0$, càd $c = -4$.

Exemple

Les solutions de l'équation de départ sont donc $x = 1$ et les solutions de l'équation $x^2 - 4x - 4$ de degré 2 qui sont

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

On peut aussi utiliser la division euclidienne des polynômes pour obtenir la factorisation.

Cette méthode ne fonctionne que si on parvient à trouver une racine du polynôme "à la main".

Pas de solutions

Parfois il est évident qu'une équation n'a pas de solution. Par exemple :

Exemple 4

L'équation

$$x^6 + x^2 + 2 = 0$$

n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$. *En effet, pour tout* x *on a* $x^2 \geqslant 0$ *et* $x^6 = (x^3)^2 \geqslant 0$ *donc*

$$x^6 + x^2 + 2 \geqslant 2 > 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Systèmes d'équations

En sciences, il arrive souvent qu'on modélise un problème sous la forme d'un **système d'équations** avec plusieurs inconnues.

Les systèmes les plus simple sont les **systèmes d'équations linéaires**, que nous allons étudier.

Un exemple de système linéaire

Exemple 5

Un pharmacien souhaite concevoir un médicament (en solution liquide) en mélangeant deux produits A et B. Il souhaite avoir une solution de 10 *mL. Mais pour que le médicament soit efficace, le pharmacien doit mettre* 2 *mL de plus du produit A que du produit B. Comment trouver les quantités de produits A et B ?*
Si on note x la quantité de produit A en mL et y la quantité de produit B en mL on doit donc avoir

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x = y + 2 \end{cases}$$

Un exemple de système linéaire

Exemple (Suite de l'exemple précédent)

Pour résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x = y + 2 \end{cases}$$

on peut remplacer x *par* $y + 2$ *dans la première équation, ce qui donne* $2y + 2 = 10$ *et donc* $y = 4$ *et* $x = y + 2 = 6$.

Systèmes d'équations linéaires

Les **systèmes d'équations linéaires** à deux inconnues sont ceux qu'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y = c_1 \\ b_1 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

avec a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 des nombres réels.

L'adjectif “linéaire” signifie simplement que chaque équation est un polynôme de degré 1 en chacune de ses variables : il n'y a pas de terme en degré supérieur, que ce soit en x ou en y.

Systèmes d'équations

Exemple 6

Le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ 2x + y^3 = 0 \end{cases}$$

n'est pas linéaire à cause du x^2 *dans la première équation ou du* y^3 *dans la deuxième.*

Pour résoudre les systèmes non linéaires aucune méthode générale n'existe.

Systèmes d'équations

On rencontre aussi des systèmes d'équations linéaires à trois inconnues x, y et z :

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = d_1 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = d_2 \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

On pourrait de même avoir des systèmes d'équations linéaires de n équations à m inconnues avec n et m des entiers quelconques.

Systèmes d'équations

Exemple

Voici un exemple de système linéaire en 4 inconnues x, y, z, t :

$$\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ x \quad - y \qquad\qquad = 1 \\ \qquad\qquad 2z + 3t = 1 \\ 4x + 5y + t + z = -3 \end{cases}$$

Méthode par substitution

Les systèmes linéaires interviennent souvent en sciences, il est important de savoir les résoudre.

Méthode par substitution : On utilise une équation du système (n'importe laquelle) pour exprimer une des variables en fonction des autres (on l'isole) et on remplace toutes les occurrences de cette variable dans les autres équations par l'expression obtenue.

On a ainsi éliminé une des variables, et on peut répéter le processus sur les autres équations puisque on a en fait un nouveau système avec une variable de moins et une équation de moins.

Méthode par substitution

Exemple 7

Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x - 4y + z = 1 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on tire $y = -2x$ et on obtient donc le système de deux équations à deux inconnues en remplacant y dans la première et troisième équation :

$$\begin{cases} x - 2x + z = 0 \\ 3x \underbrace{-4(-2)}_{=+8} x + z = 1 \end{cases}$$

Méthode par substitution

Exemple (Suite de l'exemple précédent)

On obtient donc le système

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ 11x + z = 1 \end{cases}$$

De la première équation, on tire $z = x$ et on obtient donc l'équation

$$11x + x = 1.$$

Donc $x = 1/12$. Ainsi $z = x = 1/12$. Comme $y = -2x$ on obtient $y = -1/6$.

Une unique solution ?

La méthode de substitution permet donc de déterminer les solutions d'un système donné. **Mais attention !** Certains systèmes linéaires

1. n'admettent aucune solution,
2. admettent une infinité de solutions.

Pas de solution

Exemple 8

Le système :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

n'admet aucune solution. En effet $x + y$ *ne peut pas en même temps être égal à* 1 *et à* 0*.*

Une infinité de solution

Exemple 9

Le système :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

admet une infinité de solution. En effet, la deuxième équation est égale à deux fois la première. Donc elle est automatiquement satisfaite si la première l'est.

Comme il existe une infinité de réels x *et* y *tels que* $x + y = 1$ *(le nombre* x *peut valoir n'importe quoi, du moment qu'on prend* $y = 1 - x$*) le système de départ admet une infinité de solutions.*

une infinité ou zéro solution ?

Si le système qu'on veut résoudre n'admet pas de solutions on doit tomber sur une contradiction à un moment donné dans la résolution (du genre $0 = 1$ comme on a obtenu).

Si le système qu'on veut résoudre admet une infinité de solutions, c'est qu'à un moment de la résolution on obtiendra un système avec moins d'équations que d'inconnues (de sorte que certaines inconnues seront indéterminées).

Méthode du pivot de Gauss

Il existe une autre méthode de résolution des systèmes linéaires qui est fortement utilisée : c'est la **méthode (du pivot) de Gauss**.

Cette méthode est basée sur le principe suivant : si on remplace une équation du système par cette même équation à laquelle on a ajouté un multiple (non nul) d'une autre équation du sytème, on ne change pas l'ensemble des solutions.

Méthode du pivot de Gauss

L'idée de la méthode de Gauss est alors de remplacer le système à résoudre par un autre qui lui est équivalent mais qui est plus simple à résoudre. Pour cela, on fait disparaître certaines variables en ajoutant des multiples de certaines équations à d'autres équations. Voyons ceci sur un exemple.

Méthode du pivot de Gauss en exemple

Exemple 10

Résolvons le système suivant par la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Si on ajoute la deuxième équation à la première équation, cela simplifiera le système car on fera disparaître la variable x *dans la première équation.On obtient donc un système équivalent :*

$$\begin{cases} 2y + 2z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Méthode du pivot de Gauss en exemple

Exemple (Suite de l'exemple précédent)

Pour simplifier le système :

$$\begin{cases} 2y + 2z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

on ajoute deux fois la deuxième ligne à la troisième pour faire disparaître la variable x dans la troisième équation :

$$\begin{cases} 2y + 2z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ 4y + z = 3 \end{cases}$$

Méthode du pivot de Gauss en exemple

Exemple (Suite de l'exemple précédent)

Pour simplifier le système :

$$\begin{cases} 2y + 2z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ 4y + z = 3 \end{cases}$$

on n'utilisera plus la deuxième équation pour faire des additions, sinon on fera à nouveau apparaître la variable x. Utilisons plutôt la première équation pour essayer de faire disparaître y. On peut commencer par la diviser par 2 :

$$\begin{cases} y + z = \frac{1}{2} \\ -x + y + z = 0 \\ 4y + z = 3 \end{cases}$$

Méthode du pivot de Gauss en exemple

Exemple (Suite de l'exemple précédent)

On obtient donc :

$$\begin{cases} y + z = \frac{1}{2} \\ -x + y + z = 0 \\ 4y + z = 3 \end{cases}$$

On va soustraire la première équation à la deuxième et la soustraire 4 *fois à la troisième.*

$$\begin{cases} y + z = \frac{1}{2} \\ -x = -\frac{1}{2} \\ -3z = 1 \end{cases}$$

Méthode du pivot de Gauss en exemple

Exemple (Suite de l'exemple précédent)

On a

$$\begin{cases} y + z = \frac{1}{2} \\ -x = -\frac{1}{2} \\ -3z = 1 \end{cases}$$

Le système est donc résolu puisque $z = -1/3$, $x = 1/2$ *et donc*

$$y = 1/2 + 1/3 = 5/6.$$

Méthode du pivot de Gauss : les opérations valides

Les deux opérations que l'on peut utiliser au cours du pivot de Gauss sont :

1. Ajouter à une équation (une ligne) un multiple non nul d'une autre équation

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \iff \begin{cases} A + \lambda C = B + \lambda D \\ C = D \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_0).$$

2. Multiplier une équation (une ligne) par un réel non nul

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda A = \lambda B \\ C = D \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_0).$$

Résumé des points importants du chapitre

1. Equations polynomiales et polynômes
2. Systèmes d'équations linéaires
   - Résolution par substitution
   - Pivot de Gauss